МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

З ДИСЦИПЛІНИ

Теорія автоматичного керування

*(для студентів 3 курсу усіх форм навчання
за напрямом підготовки 6.050702 «Електромеханіка»
та слухачів другої вищої освіти
спеціальності «Електричний транспорт»)*

Харків
ХНАМГ
2011

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів з дисципліни «Теорія автоматичного керування» (для студентів 3 курсу усіх форм навчання за напрямом підготовки 6.050702 «Електромеханіка» та слухачів другої вищої освіти спеціальності «Електричний транспорт») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: К. О. Сорока, Д. О. Личов. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 58 с.

Укладачі: **К. О. Сорока**, **Д. О. Личов**

Рецензент: д.т.н., проф. В. Ф. Харченко

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рекомендовано кафедрою електричного транспорту,
протокол №5 від 23.11.2010 р.

Зміст

Заняття 1. Повторення розділів математики, що необхідні для успішного вивчення ТАК

Комплексне число дії над комплексними числами. Формули Ейлера. Знаходження похідних. Побудова графіків похідних та інтегралів функцій

Зміст заняття

Наше уявлення щодо числа змінюється по мірі розширення кола наших знань та завдань, які доводиться розв'язувати. Якщо для рахунку окремих предметів досить додатних натуральних чисел, то вже під час виконання дії віднімання доводиться мати справу з від’ємними числами. Коли ми виконуємо ділення, то натуральних чисел недосить і потрібні раціональні числа. В свою чергу раціональних чисел виявляється не досить для вимірювання довжини відрізків. Діагональ квадрата несумірна з його стороною. Щоб визначити довжину кола за відомою довжиною його радіуса, необхідно до раціональних чисел додати ірраціональні числа. Несумірними числами є періоди обертання Землі навколо Сонця та навколо своєї осі. З цим пов’язані всі проблеми складання календаря, оскільки доводиться вводити високосні роки, вносити поправки до календаря через певні проміжки часу. Раніше ірраціональні числа не вважали повноправними числами. З часом їх признали і ввели поняття дійсних чисел. Але й дійсних чисел виявляється не досить. У множині дійсних чисел не мають розв'язків квадратні рівняння з від'ємним дискримінантом (наприклад, $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$).

Виявляється достатньо ввести ще одне нове число (а саме корінь квадратний з мінус одиниці $j=\sqrt{-1}$), яке назвали уявною одиницею, і отримати замкнуту, відносно усіх дій, множину чисел. Цю множину назвали множиною комплексних числами. У множенні комплексних чисел містяться не тільки всі розв'язки кожного квадратного рівняння, але всі розв'язки алгебраїчних рівнянь будь-якого степеня з дійсними або комплексними коефіцієнтами, диференційних рівнянь, визначень логарифмів, степеня та ін. Всі дії, які є в математиці, перетворюють одне комплексне число в інше і ніколи не виникає потреба вийти за грані комплексних чисел, або твердити, що математична дія не має рішення.

Будь-яке натуральне число помножене на уявну одиницю називають уявним. Ця назва складає враження про комплексні числа, як про щось нереальне, ефемерне, містичне. Колись так вважали, аналогічно як раніше сказане про ірраціональні числа. Зараз від усієї містики не залишилось нічого, крім назви ”уявні числа”. Вже у часи Г. Гауса (1777-1855р.р.) було дано геометричне тлумачення комплексних чисел як точок площини. Поняття комплексного числа охоплює всю множину чисел. Часткові підмножини – це дійсні та уявні числа. Без використання комплексних чисел не можна пояснити багатьох явищ фізики, механіки, електротехніки, гідродинаміки, теорії зв’язку, теорії коливань, квантової механіки і т.д. Та й сама математика без комплексних чисел не може бути цілісною наукою.

Цей спіч про комплексні числа доводиться писати тому, що під час шкільної підготовки (та подекуди і вузівської) досить часто не дають вірного пояснення, що комплексні числа – це числа, які так само потрібні для пояснення явищ нашого буття як і натуральні числа. Повна множина чисел – це якраз множина комплексних чисел. Під час вивчення математики вчителі досить часто говорять, що квадратні рівняння з від’ємним дискримінантом не мають розв’язку, не задумуючись про те, що таке пояснення породжує хибне уявлення про математику не як цільну науку, ніби у ній є якісь заборони щодо виконання математичних дій. Наприклад, запитайте у більшості випускників ВНЗ: чому дорівнює логарифм від’ємного числа? Досить часто можна одержати відповідь, що такого не існує. Насправді він існує в межах комплексних чисел.

Комплексні числа – це числа, які складаються з дійсної та уявної частин:

$$z = \alpha \pm j\beta \,. \tag{1}$$

Тут α та β – дійсні числа. α – дійсна частина комплексного числа, $j\beta$ – уявна частина.

Ця форма представлення комплексного числа називається алгебраїчною формою.

Комплексно спряжене число визначають, як комплексне число, в якого знак перед уявною частиною змінений на протилежний. Комплексні числа прийнято зображати на комплексній площині, яку утворюють дійсна та уявна осі. Дійсну частину комплексного числа зображують за горизонтальною числовою віссю, а уявну – за вертикальною віссю.

Комплексна площина та приклади чисел приведено на рис. 1. Тут числа z, z1-z4, z8 – комплексні, z5-z6 – уявні, z7 – дійсне. Числа z1 і z2; z3 і z4, а також z5 і z6 – комплексно спряжені.

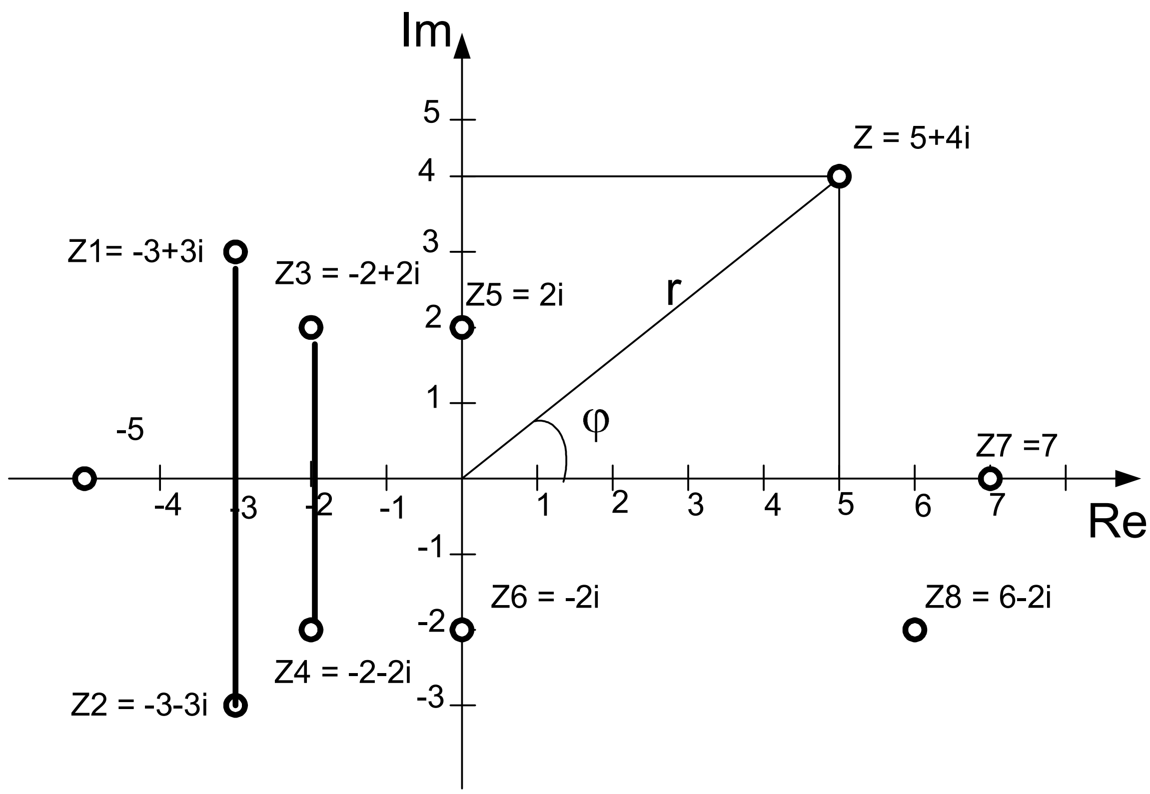


Рис. 1 – Комплексна площина

Тригонометрична форма комплексного числа передбачає подання довжини радіуса вектора *r* - (модуля) і кута φ - (аргументу), утвореного дійсною віссю і радіус-вектором числа.

$$z = r\cos\varphi + jr\sin\varphi\,. \tag{2}$$

Між цими формами існує співвідношення:

$$\alpha = r\cos,\\ \beta = r\sin, \tag{3}$$

та зворотне співвідношення:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\\ \varphi = arc\ tg\frac{\beta}{\alpha}. \tag{4}$$

Показникова форма комплексного числа – це його запис комплексного у вигляді:

$$z = r\ \exp(i\varphi)\ . \tag{5}$$

Тут: r – модуль, φ – аргумент.

Комплексні числа і тригонометричні функції зв'язані співвідношеннями, які називають формулами Ейлера:

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{\text{-}\mathrm{j}\varphi}}{2},\quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{\text{-}\mathrm{j}\varphi}}{2j}; \tag{6}$$

$$\mathrm{e}^{\text{-}\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi \text{-} \mathrm{j}\sin\varphi,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi. \tag{7}$$

Математичні дії над комплексними числами виконують аналогічно діям над двочленами. При додаванні складають дійсну та уявні частини. При множенні діють як двочлени і виділяють дійсну та уявну частини. Результатом множення комплексного числа на комплексно спряжене число є дійсне число. Для виконання дії ділення потрібно знаменник і чисельник помножити на комплексно спряжене число знаменника, а потім поділити дійсну і уявну частини чисельника на дійсне число в знаменнику. Знаходження кореня n-го степеня з комплексного числа та піднесення комплексного числа до степеня, краще виконувати за допомогою показникової форми. При знаходженні кореня відшукують корінь з модуля і фазу, знаходять, поділивши аргумент на показник степеня. При піднесенні в степінь – аргумент множать на відповідний показник степеня. При цьому слід враховувати, що фазу визначають з точністю 2π, тобто $\varphi = 2\pi n\ \varphi$, де n – довільне ціле число.

Комплексні числа прийнято зображати на комплексній площині. Комплексну площину утворюють дійсна та уявна осі. Дійсну частину комплексного числа зображують за горизонтальною числовою віссю, а уявну – за вертикальною віссю. Приклад зображення комплексного числа на комплексну площину наведений на рис. 1.

Приклад. Комплексні числа виникають під час спроби розв'язати квадратне рівняння. Візьмемо рівняння:

$$x^2+4x+8=0.$$

Для знаходження його розв'язку визначимо дискримінант рівняння:

$$D=\sqrt{16-8*2*1}=\sqrt{-16}=4\sqrt{-1}=4j\ .$$

Дискримінант рівняння від'ємний. Отже, потрібно ввести уявне число для його запису.

Рішення рівняння матиме вигляд:

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 4j}{2},$$
$$x_1=-2+2j,$$
$$x_2=-2-2j.$$

Тобто дане квадратне рівняння має два розв'язки. Ці розв'язки є комплексними числами і відрізняються знаком перед уявною частиною. Вони показані на рис.1. Основна теорема алгебри стверджує, що рівняння n-го порядку завжди має n коренів.

Підготовка до занять

Під час самостійної роботи та підготовки до практичних занять необхідно вивчити матеріал з посібника [1] (ст. 49 – 60), та проробити додаткову літературу [2-4]. Особливу увагу слід звернути на визначення комплексного числа і дії з ним. Також потрібно повторити визначення похідної та інтеграла, їх геометричне тлумачення, порядок знаходження похідних складних функцій.

Порядок проведення заняття

На початку занять слід пригадати основні поняття з математики, а саме:

- визначення комплексного числа, форми його представлення і порядок виконання дій з комплексним числом;
- геометричне тлумачення похідної та інтегралу, графіки функцій;
- порядок знаходження похідних складних функцій.

Виконання завдань під час заняття

1. Розв’язати квадратне рівняння:

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

2. Розрахувати модуль та аргумент коренів рівняння.
3. Побудувати корені рівняння на комплексній площині.
4. Виконати дії над комплексними числами, наприклад

$$z1=3+i\bullet 4;$$

$$z2=4-i;$$

$$z3 = z1+z2;$$

$$z5 = z1*z2;$$

$$z6=z1/z2;$$

$$z7=z1^2;$$

$$z8=\sqrt{z1}.$$

4. Знайти першу та другу похідні складної функції, наприклад:

$$f(x) = x^2\sin(3x).$$

5. Пригадати визначення похідної та інтегралу. За відомим графіком зміни швидкості транспортного засобу побудувати графіки зміни шляху та прискорення (Рис.2).

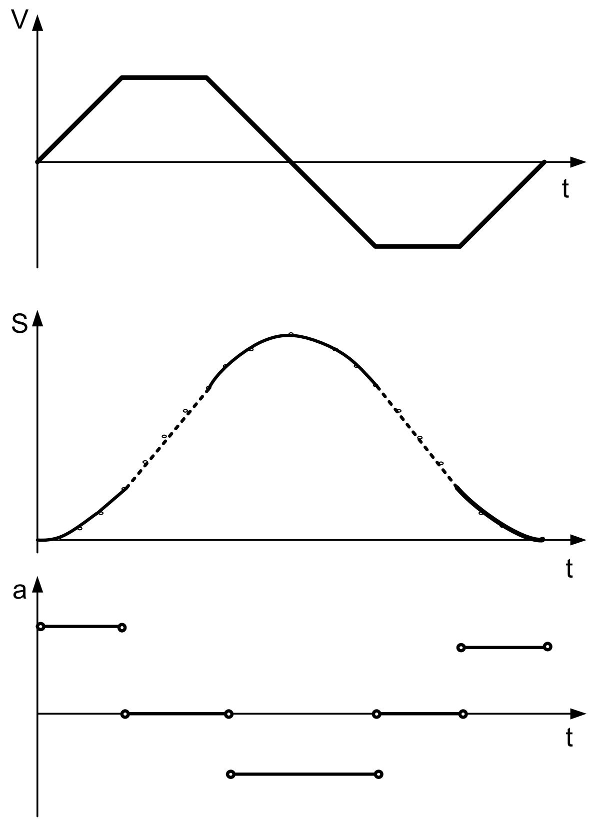


Рис. 2 – Побудова графіка шляху та прискорення за графіком швидкості транспортного засобу

Проведення нульової контрольної роботи

Під час заняття проводять контрольну робота з метою перевірки ступеня готовності студентів до засвоєння матеріалу. На контрольну роботу виділена одна академічна година.

Завдання для самостійної роботи в позаурочний час.

Варіанти завдань наведені в табл. 1.

1. Записати (відповідно до варіанту роботи) з табл. 1 (колонки 1 і 2) п’ять чисел, рівняння та функцію.

2. Розрахувати модулі, аргументи, дійсну та уявну частини усіх чисел та записати їх значення в алгебраїчній та показниковій формах.

3. Зобразити числа на комплексній площині.

4. Розв’язати квадратне рівняння, знайти корені та занести на комплексну площину.

5, Знайти першу та другу похідні функції.

Контрольні запитання

1. Дати означення комплексного числа.
2. Сформулювати означення уявної одиниці.
3. Як знайти степінь уявної одиниці?
4. Які комплексні числа називають рівними, спряженими.
5. Як зображують похідні комплексні числа?
6. Геометричний зміст комплексного числа.
7. Записати формулу для знаходження довільного степеня уявної одиниці.
8. Як виконують дії додавання і віднімання комплексних чисел, що записаних в алгебраїчній формі?
9. Як виконують дії множення та ділення комплексних чисел записаних, що в алгебраїчній формі?
10. Як знайти корінь кубічний з комплексного числа?
11. Чому дорівнює добуток комплексно спряжених чисел?
12. Чому дорівнює похідна від добутку двох функцій?
13. Яке геометричне тлумачення похідної функції?

Таблиця 1 – Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант завдання	Номери чисел, рівнянь та функцій	Число	Рівняння	Функція
1.	1,5,10,15,25	2+3i	$2x^2+3x+4=0$	$f(x)=x^2e^{3x}$
2.	2,6,11,16,25	1-3i	$2x^2+x+4=0$	$f(x)=x^2\sin 2x$
3.	3,7,12,17,20	4+i	$2x^2-x+4=0$	$f(x)=e^{2x}/x$
4.	4,8,9,21,24	3-2i	$2x^2+x+7=0$	$f(x)=x^2\cos 3x$
5.	5,7,10,16,22	3-3i	$2x^2-2x+4=0$	$f(x)=e^{3x}tgx$
6.	6,8,9,17,24	2+i	$2x^2-x+7=0$	$f(x)=xe^{3x}\sin x$
7.	7,9,12,23,25	5-2i	$4x^2+3x+4=0$	$f(x)=e^{3x}/(x-1)$
8.	8,11,13,23,25	2+5i	$x^2+6x+1=0$	$f(x)=x\ \sin 3x$
9.	9,12,13,14,22	1-5i	$2x^2-2x+3=0$	$f(x)=xe^{x}$
10.	10,13,16,19,21	2-4i	$2x^2+2x+7=0$	$f(x)=3x\cos 3x$
11.	1,4,7,17,18	3+i	$2x^2-2x+5=0$	$f(x)=e^{2x}\sin 2x$
12.	2,5,8,19,22	2+4i	$2x^2-2x+7=0$	$f(x)=xe^{x}\sin x$
13.	13,16,19,22,25	2+i	$2x^2+5x+4=0$	$f(x)=x^2tgx$
14.	1,4,18,21,24	5-i	$2x^2+x+4=0$	$f(x)=5x^2\sin 3x$
15.	1,2,3,18,25	2 exp(iπ/6)	$2x^2-3x+4=0$	$f(x)=2xe^{2x}$
16.	6,7,8,19,20	3exp(iπ/2)	$2x^2+3x+7=0$	$f(x)=3x^2\cos 3x$
17.	11,12,13,16,23	2exp(i3π/4)	$2x^2-3x+4=0$	$f(x)=5e^{x}\sin 2x$
18.	6,7,18,19,20	4exp(i5π/6)	$2x^2-2x+5=0$	$f(x)=3xe^{x}\sin x$
19.	1,2,2,24,25	exp(iπ2/3)	$2x^2-3x+4=0$	$f(x)=2xe^{2x}$
20.	1,3,5,17,19	3exp(-iπ/6)	$2x^2+3x+7=0$	$f(x)=tgx*\cos 3x$
21.	2,4,6,18,20	2exp(i5π/6)	$x^2+3x+7=0$	$f(x)=x^2\cos 4x$
22.	3,11, 15,17,19	3exp(iπ3/8)	$2x^2-x+8=0$	$f(x)=e^{x}\sin x\cos x$
23.	12,14,16,18,20	exp(-i2π/6)	$x^2-2x+5=0$	$f(x)=x^3e^{x}\sin x$
24.	3,4,7,18,21	4exp(iπ2/6)	$2x^2-3x+6=0$	$f(x)=e^{2x}tgx$
25.	5,7,11,23,25	2 exp(iπ/6)	$2x^2+3x+9=0$	$f(x)=2x^2\cos 2x$

Заняття 2. Розгляд власних коливань САК. Дослідження власних коливань найпростіших динамічних ланок САК. Характеристичне рівняння

Зміст заняття

Динаміку САК описують диференційними, які пов'язують вхідні дії з вихідними. Ці рівняння називають рівняннями динаміки. Рівняння динаміки описує роботу САК при будь-якій дії на неї і будь-яких початкових умовах. Права частина рівняння визначає зовнішні дії на систему. Якщо зовнішні дії на систему дорівнюють нулю, права частина теж дорівнює нулю; у системі відбуваються тільки власні коливання. Характер власних коливань залежить від властивостей системи. Динаміку лінійних систем описують лінійними диференційними рівняннями.

Загальний розв'язок диференційного рівняння дорівнює загальному розв'язку однорідного рівняння плюс частковий розв'язок неоднорідного рівняння. Однорідне рівняння одержують, якщо праву частину неоднорідного рівняння прирівняють до нуля.

Загальний вигляд лінійного однорідного рівняння такий:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_{n-1} y^{'}(t) + y(t) = 0 . \qquad (22)$$

Для розв'язання однорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами, переважно використовують підстановку Ейлера, а саме:

$$y(t) = \exp(pt) . \qquad (23)$$

Ця підстановка приводить до алгебраїчного рівняння.

За формулою підстановки знаходимо похідні:

$$y'(t) = p \exp(pt),$$

$$y^{(2)}(t) = p^2 \exp(pt) , \qquad (24)$$

$$y^{(n)}(t) = p^n \exp(pt) .$$

У результаті підстановки отримаємо:

$$a_0 p^n \exp(pt) + a_1 p^{n-1} \exp(pt) + a_2 p^{n-2} \exp(pt) ... + a_{n-1} p \exp(pt) + \exp(pt) = 0 .$$

Після спрощення:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} ... + a_{n-1} p + 1) \exp(pt) = 0 . \qquad (25)$$

Щоб вираз (25) дорівнював нулю, потрібно, щоб нулю дорівнював множник в дужках:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} ... + a_{n-1} p + 1) = 0 . \qquad (26)$$

Це алгебраїчне рівняння. У ньому *p*-змінна величина, а $a_0, a_1, a_2, ...$ – постійні коефіцієнти. Розв'язавши рівняння (26), знаходимо його корені і (23), дає розв'язок однорідного диференційного рівняння (22). Згідно з основною теоремою алгебри рівняння n-го степеня має n розв'язків.

Рівняння (25) називають характеристичним рівнянням. В теорії диференційних рівнянь, а також в ТАК, дане рівняння відіграє важливу роль.

Характеристичне рівняння – це алгебраїчне рівняння, яке відповідає однорідному диференційному рівнянню. Його одержали шляхом підстановки Ейлера. Подекуди використовують формальне правило запису характеристичного рівняння: в однорідному лінійному рівнянні заміняють операцію похідної змінною величиною *p* в степені, що дорівнює порядку похідної.

Корені характеристичного рівняння (25) – це комплексні числа, деколи дійсні або уявні. Розглядаючи можливі значення коренів, одержимо умову стійкості САК, а саме: корені характеристичного рівняння мусять мати від'ємну дійсну частину (знаходяться в лівій частині комплексної площини).

Підготовка до занять

Для самостійного вивчення матеріалу потрібно розглянути матеріал посібник [1] – ст. 49-60, додаткову літературу [2] ст. 61-74, [3] – 30-36, 88-90.

Порядок проведення заняття

На початку заняття слід пригадати основні поняття з математики, а саме:

- диференційні рівняння; однорідне і неоднорідне рівняння; лінійне рівняння з постійними коефіцієнтами; початкові умови;

- методи розв'язання диференційних рівнянь; метод розділення змінних; підстановка Ейлера.

Характеристичне рівняння. Умови стійкості САК.

Виконання завдань під час заняття

1. Розв'язати рівняння методом розділення змінних:

$$0{,}2\frac{dy}{dt} + y = 0\,.$$

Побудувати графік розв'язку.

2. Розв'язати методом підстановки Ейлера такі рівняння:

$$0{,}2\frac{dy}{dt} + y = 0\,; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0\,; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0\,;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0\,; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0\,.$$

2. Виконати табуляцію розв'язку.

3. Побудувати графіки розв'язків.

4. Зобразити корені рівнянь на комплексній площині.

5. Зробити висновки відносно стійкості систем, які описуються вказаними рівняннями.

Завдання для самостійної роботи в поза аудиторний час

Розвязати диференційні рівняння САК, що наведені нижче. Записати характеристичне рівняння, знайти його корені, їх модуль та аргумент; зобразити корені характеристичного рівняння на комплексній площині. Записати розв’язок рівняння при початкових умовах:

$$y(0) = 1; \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 .$$

Виконати табуляцію розв’язку. Побудувати графіки розв’язків. Зробити висновки відносно стійкості систем.

$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=0$,	$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-1\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$,
$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-1\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=0$,	$4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=0$,
$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+7y(t)=0$,	$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+1\frac{dy(t)}{dt}+7y(t)=0$,
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$,	$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-2\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=0$,
$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-2\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=0$,	$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=0$.

Заняття 3. Неоднорідні рівняння САК. Передаточна функція. Типи динамічних ланок

Зміст заняття

Рівняння динаміки систем керування у випадку, коли зовнішні дії відмінні від нуля, розв'язують, як правило, методом операційного числення. Пряме перетворення Лапласа має вигляд:

$$y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt . \tag{36}$$

Зворотне перетворення:

$$y(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y(p) e^{pt} dt . \tag{37}$$

Величина *y(p)* має назву зображенням функції *y(t)* за Лапласом, або просто *зображення*. Величину *y(t)* називають оригіналом функції. Аналогічно можна записати формули для оригіналу та зображення будь-якої функції (наприклад *x(t)* – оригінал функції та *x(p)* – зображення функції).

Розв'язання неоднорідних рівнянь за допомогою перетворень Лапласа детально описано в [1]. Формально, щоб перейти від диференційного рівняння до рівняння для зображення потрібно замінити функції їх зображеннями *y(t)* → *y(p)*: *x(t)* → *x(p)*, а знак похідної оператором *p*. У результаті цього диференційне рівняння перетвориться в рівняння виду:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + 1) y(p) = (b_0 p^m + \ldots + b_m) x(p) \tag{38}$$

З (38) для зображення вихідної величини *y(p)* одержимо:

$$y(p) = \frac{(b_0 p^m + \ldots + b_m)}{(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + 1)} x(p) . \tag{39}$$

$$y(p) = W(p) x(p) \tag{40}$$

Величина W(p) у даному відношенні є передаточною функцією:

$$W(p)=\frac{y(p)}{x(p)}. \tag{41}$$

За відомою передаточною функцією згідно з формули (40) зображення розв'язку рівняння, а за таблицями перетворень Лапласа відшукують сам розв'язок.

Підготовка до занять

Для самостійного вивчення матеріалу потрібно розглянути матеріал: посібник [1] ст. 61-65; додаткову літературу [2] ст. 69-95, [3] ст. 36-65.

Порядок проведення заняття

На початку заняття слід пригадати основні поняття з математики, а саме:

- неоднорідне диференційне рівняння. Загальний та частковий розв'язок;
- розв'язання диференційних рівнянь методом операційного числення;
- передаточна функція;
- перехідна функція та перехідна характеристика;
- типові ланки САК.

Виконання завдань під час заняття

1. Виконати дії з вирішення диференційного рівняння, що записане в загальному вигляді, методом перетворення Лапласа.

Записати загальний вигляд диференційного рівняння САК у вигляді:

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+a_2y^{(n-2)}(t)+\ldots+a_{n-1}y^{'}(t)+y(t)=$$
$$=b_0x^{(m)}(t)+b_1x^{(m-1)}(t)+\ldots+b_mx(t).$$

Та нульові початкові умови:

$$y(0) = 0;\quad y'(0) = 0;\quad y^{(2)}(0) = 0;\ldots,\ y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Помножимо праву й ліву частини рівняння на величину e^{-pt} і виконати інтегрування всіх множників в межах від 0 до ∞ $\int_0^\infty dt$:

$$a_0\int_0^\infty y^{(n)}(t)e^{-pt}dt+...+a_{n-2}\int_0^\infty y^{(2)}(t)e^{-pt}dt+a_{n-1}\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}dt+\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt=$$
$$=b_0\int_0^\infty x^{(m)}(t)e^{-pt}dt+...+b_m\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt.$$

Розглянути доданок $\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}dt$.

Виконати його інтегрування частинами. Правило інтегрування по частинами таке:

$$\int_a^b UdV=UV\Big|_a^b+\int_a^b VdU\ .$$

Використовуючи його, одержимо:

$$\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}dt = y(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt = y(0)e^{-0}+y(\infty)e^{-\infty}+p\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt\ .$$

Використаємо початкову умову y(0) = 0. Матимемо:

$$\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}dt = p\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt\ .$$

Аналогічним чином розглянути наступний доданок $\int_0^\infty y^{(2)}(t)e^{-pt}dt$ з урахуванням початкової умови y’(0) = 0

$$\int_0^\infty y^{(2)}(t)e^{-pt}dt = p^2\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt\ .$$

$$\int_0^\infty y^{(2)}(t)e^{-pt}dt = y^{'}(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y^{'}(t)e^{-pt}dt = y^{'}(0)e^{-0}+y^{'}(\infty)e^{-\infty}+p\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}dt\ .$$

Використавши початкові умови та вираз, одержимо співвідношення:

$$\int_0^\infty y^{(2)}(t)e^{-pt}dt = p\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}dt = p^2\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt\ .$$

У результаті перетворень рівняння набуде вигляду:

$$a_0 p^n \int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt + a_1 p^{n-1}\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt + ... + a_{n-2}p^2\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt + a_{n-1}p\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}dt + \int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt =$$

$$= b_0 p^m \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt + ... + b_m \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt.$$

Винесемо за дужки спільний множник у правій і лівій частинах рівняння і матимемо:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-2}p^2 + a_{n-1}p + 1)\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt = (b_0 p^m + ... + b_m)\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt \,.$$

Множники за дужками (згідно з використаною підстановкою) − це зображення вихідного y(p) та вхідного x(p) сигналів.

Отже приходимо до виразу:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-2}p^2 + a_{n-1}p + 1)y(p) = (b_0 p^m + ... + b_m)x(p)$$

Відношенням зображення вихідного сигналу до зображення вхідного знаходимо передаточну функцію:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{(b_0 p^m + ... + b_m)}{(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-2}p^2 + a_{n-1}p + 1)} \,.$$

2. Записати диференційне рівняння, в якому є тільки два члени лівої частини і один – правої:

$$0{,}2\frac{dy}{dt} + y = 1 \,.$$

Знайти передаточну функцію Записати для цього рівняння передаточну функцію.

3. Записати попереднє рівняння, коли коефіцієнт при y(t) дорівнює нулю. Якому перетворенню відповідає це рівняння? Записати передаточну функцію.

4. Записати рівняння, в якого у лівій частині відмінний від нуля тільки коефіцієнт при самій вихідній функції, а в правій – тільки при першій похідній. Якому перетворенню відповідає це рівняння?

Завдання для самостійної роботи в поза аудиторний час

Записати передаточні функції для наступних рівнянь:

$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-1\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=x(t);$ $\quad 2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+7y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t);$

$2\frac{dy(t)}{dt}+7y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t);$ $\quad 2\frac{dy(t)}{dt}=2x(t);$ $\quad 7y(t)=\frac{dx(t)}{dt}.$

Записати диференційні рівняння, для систем, передаточні функції яких дорівнюють:

$W(p)=\frac{K}{Tp+1};$ $\quad W(p)=\frac{K}{T^2p^2+2TDp+1};$ $\quad$ W(p) = K;

$W(p)=Kp;$ $\quad W(p)=\frac{Kp}{Tp+1};$ $\quad W(p)=\frac{K}{p};$

$W(p)=\frac{ap+b}{cp^2+dp+1}.$

Вказати яким типам динамічних ланок відповідає кожне рівняння.

Заняття 4. Тема заняття: Розв'язання рівнянь динаміки методом операційного числення. Знаходження перехідної та вагової функцій

Зміст заняття

Щоб вивчити характеристику системи управління потрібно подіяти не неї та проаналізувати її реакцію. Дію на систему керування називають подачею сигналу. Сигнал, який подають для вивчення характеристики, називають випробувальним. Випробувальний сигнал вибирають, як правило, найпростішим. Це ступінчатий сигнал, або імпульсний, подекуди гармонійний. Ступінчатий сигнал названий через вигляд графіка, а саме − у вигляді сходинки. Величина сигналу спочатку має одне значення − найчастіше, що дорівнює нулю, а потім різко змінюється і встановлюється інше значення. Імпульсний сигнал це різкий удар, імпульс, коли величина миттєво збільшується і одразу падає до початкового значення. Реакцію системи на ці сигнали зображають у вигляді графіка. Графік у ТАК називають характеристикою. Щоб розрізнити за якого сигналу одержана характеристика, її називають перехідною – при ступінчатому сигналі (система була в одному стані і переходить в інший), чи імпульсною – відповідно при імпульсному сигналі. Під час теоретичного вивчення використовують не графік його математичної формули, тобто функцію. Відповідно називають − перехідна функція чи імпульсна. Перехідну функцію прийнято позначати – h(t), а імпульсну, її ще називають ваговою, – ω(t).

Перехідну та імпульсну функції можна знайти, розв'язавши диференційне рівняння системи. Для одержання перехідної функції зовнішню дію на систему, тобто праву частину диференційного рівняння, потрібно записати у вигляді ступінчатого сигналу. Для опису такого сигналу використовують тета-функцію $\Theta(t\text{-}t_0)$. Для опису імпульсного сигналу використовують дельта-функцію $\delta(t\text{-}t_0)$. Таким чином, потрібно розв'язати неоднорідне диференційне рівняння динаміки. Для розв'язання використовують метод операційного числення. Порядок розв'язання рівнянь методом операційного числення простий, а саме:

1. Записують диференційне рівняння.
2. Одержують допоміжне рівняння шляхом переходу від функцій до їх зображення. Перехід виконують за схемою:

$$x(t) \rightarrow x(p);\ y(t) \rightarrow y(p);\ d/dt \rightarrow p;\ d^2/dt^2 \rightarrow p^2;\ \ldots \quad (42)$$

3. Розв'язують допоміжне рівняння та знаходять математичний вираз для зображення вихідної величини y(p);
4. Знаходять оригінал вихідної величини, здійснивши перехід $y(t) \rightarrow y(p)$.

Цей перехід виконують за допомогою таблиць перетворення Лапласа (таблиць зображення – оригінал).

Якщо відома передаточна функція W(p), то для відшукання зображення вихідного y(p) сигналу просто треба помножити передаточну функцію на зображення вхідного сигналу x(p).

Підготовка до занять

Під час підготовки до занять слід вивчити матеріал підручника [1] ст. 58 – 63, 95 – 107 та додаткову літературу [2] – ст. 75 – 99, [3] – ст. 36 – 65.

Порядок проведення заняття

На початку заняття слід пригадати основні поняття з математики, а саме:

- неоднорідне диференційне рівняння. Загальний та частковий розв'язок;
- розв'язання диференційних рівнянь методом операційного числення;
- передаточна функція;
- перехідна функція та перехідна характеристика;
- типові ланки САК.

Виконання студентами практичних завдань

1. Знайти перехідну функцію ланки, яка описана диференційним рівнянням:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=K\ x(t)\,.$$

Початкова умова y(0) = 0.

Вхідна величина x(t) у вигляді ступінчатого сигналу є тета-функцією, тобто має вигляд:

$$x\{t\} = \Theta(t).$$

Рівняння для знаходження перехідної характеристики матиме вигляд:

$$T\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=K\ \Theta(t)\,.$$

Тут у рівнянні вихідну величину y(t) позначили як h(t), використовуючи позначення, яке прийнято для перехідної функції.

Передаточна функція для рівняння:

$$W(p)=\frac{K}{Tp+1}\,.$$

Зображення тета-функції (табл. 2) таке:

$$\Theta(t) \rightarrow 1/p.$$

(Тета-функція відповідає одиничній функції x(t) = 1, при початковій умові x(0) = 0).

Для зображення вихідної величини y(p) одержуємо:

$$h(p)=\frac{K}{(Tp+1)}\frac{1}{p}=\frac{K}{p(Tp+1)}\,).$$

Для відшукання оригіналу використаємо таблицю перетворення Лапласа, формула 10 (табл. 2)

Зображення	Оригінал
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$

Щоб привести вираз у відповідність табличній формі, потрібно винести величину Т. Одержимо:

$$h(p) = \frac{K}{T}\frac{1}{p(p+1/T)}.$$

Таблиця 2 – Перетворення Лапласа

№ п/п	Зображення	Оригінал	№ п/п	Зображення	Оригінал
1.	1	δ(t)	10.	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
2.	$\frac{1}{p}$	θ(t) чи 1	11.	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
3.	$\frac{1}{p^2}$	t	12.	$\frac{p}{p^2+\omega_0{}^2}$	$\cos(\omega_0 t)$
4.	$\frac{n!}{p^{n=1}}$	t^n n – ціле, додатнє	13.	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0{}^2}$	$\sin(\omega_0 t)$
5.	$\frac{1}{p+at}$	e^{-jat}	14.	$\frac{p}{p^2-a^2}$	ch(at)
6.	$\frac{1}{p-at}$	e^{jat}	15.	$\frac{a}{p^2-a^2}$	sh(at)
7.	$\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}	16.	$\frac{\varpi_0}{(p+a)^2+\varpi_0}$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
8.	$\frac{1}{p^2(p-a)}$	$\frac{1}{a^2}e^{at}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}t$	17.	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\varpi_0}$	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)$
9.	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	18.	$\frac{1}{(p-a)^2+\varpi_0{}^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{at}\sin(\omega t)$

Зображення x(p) y(p)		Оригінал x(t) y(t)
19.	$\frac{1}{p(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a(a-b)}e^{at}+\frac{1}{b(b-a)}e^{bt}+\frac{1}{ab}$
20.	$\frac{1}{p((p-a)^2+\varpi_0^2)}$	$\frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{at}\sin(\omega t-\mathrm{arctg}(\frac{\omega}{a}))+\frac{1}{a^2+\omega^2}$

Поклавши a = 1/T для оригіналу рішення матимемо:

$$h(t) = \frac{K}{T}\frac{1}{a}(1-e^{-at}) = K(1-e^{-\frac{t}{T}}).$$

Підставити конкретні величини (наприклад К=5, Т=0,1) та побудувати графік перехідної функції.

2. Знайти вагову функцію аперіодичної ланки.

Вагова функція (імпульсна перехідна функція) ω(t) є розв’язком диференційного рівняння, права частина якого є дельта-функцією:

$$x(t) = \delta(t).$$

Оскільки між дельта- і тета-функціями існує співвідношення:

$$\delta(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt}.$$

Тобто дельта-функція є похідною від тета-функції, то між розтяжками рівняння для перехідної і вагової функцій існує це ж саме співвідношення. Отже, вагова функція може бути знайдена як похідна від перехідної функції:

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Диференціюючи знайдене значення перехідної функції, знаходимо вагову функцію:

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K}{T} e^{-\frac{1}{T}}.$$

Підставити конкретні величини (наприклад К=5, Т=0,1) та побудувати графік перехідної функції.

3. Знайти перехідну функцію коливальної ланки.

Рівняння для перехідної функції:

$$T^2 \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + 2TD \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = K.$$

Початкові умови:

$$h(0) = 0,$$
$$h'(0) = 0.$$

Зображення правої частини $x(p) = 1/p$.

Передаточна функція:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2TDp + 1}.$$

Отже, зображення перехідної функції:

$$h(p) = W(p)x(p) = \frac{K}{(T^2 p^2 + 2TDp + 1)\,p}.$$

Дана формула в таблицях перетворення Лапласа відсутня, але є інші для різних значень коренів знаменника.

Коли корені знаменника комплексні, потрібно використати таку формулу для зображення:

$$h(p) = \frac{1}{p\left[(p-a)^2 + \omega^2\right]}.$$

Їй відповідає оригінал (табл. 2):

$$\frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{at} \sin(\omega t - arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)) + \frac{1}{a^2+\omega^2}.$$

Ввівши позначення:

$$a = -\frac{D}{T}, \quad \omega^2 = \frac{1-D^2}{T^2},$$

одержимо

$$h(t) = K\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} e^{-\frac{D}{T}t} \sin(\omega t - \alpha)\right),$$

де $\alpha = arctg\left(-\sqrt{\frac{1-D^2}{D^2}}\right)$.

Дійсні різні корені p_1 і p_2.

Зображення перехідної функції матиме вигляд:

$$h(p) = \frac{K}{T^2}\frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)}.$$

Згідно з таблицями перетворення Лапласа знаходимо оригінал розв'язку:

$$h(t) = \frac{K}{T^2}\left(\frac{1}{p_1(p_1-p_2)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2(p_2-p_1)} e^{p_2 t} + \frac{1}{p_1 p_2}\right).$$

Аналогічно розглядаю випадок чисто уявних коренів.

Завдання для самостійної роботи в поза аудиторний час

Розрахувати вагові функції аперіодичної та коливальної ланок, елементарних динамічних ланок: підсилювальної, диференційної,

Розрахувати перехідні та вагові функції: інтегруючої, реальної диференційної.

Заняття 5. Тема заняття: Одержання передатної функції складної системи за її структурною схемою

Зміст заняття

Систему автоматичного керування прийнято описувати структурною схемою. Структурна схема призначена для математичного аналізу системи. За нею визначають передаточну функцію і розраховують динаміку системи. Для цього виділяють фрагменти з різними типами з’єднання ланок: послідовним, паралельним і зустрічно паралельним та заміняють їх еквівалентними ланками. Якщо структурна схема має перехресні з’єднання ланок, то використовують правила перетворення схем. Загальне правило можна сформулювати таким чином: У структурній схемі допускається переносити вузли (чи суматори) з входу ланки на її вихід, або з виходу на вхід, долучаючи при цьому фіктивну ланку з таким розрахунком, щоб сигнали біля реальних ланок не змінилися.

Підготовка до занять

Під час підготовки до занять слід пробробити наступний матеріал з підручника: [1] - ст. 77-89, [2] – ст. 143-151, [3] – 65-79.

Порядок проведення заняття

На початку заняття повторити:-

- типи з’єднань ланок;
- їх передаточні функції;
- ланка зворотної дії;

- правила перетворення структурних схем.

Виконати зі студентами нижче приведені завдання.

Видати завдання для самостійної роботи.

Виконання зі студентами практичних завдань

1. Розглянемо приклад розрахунку передатної функції системи, що зображена на рис. 2. Схема має перетин зв'язків і виділити в ній ланки, які з'єднані послідовно, паралельно чи зустрічно-паралельно неможливо.

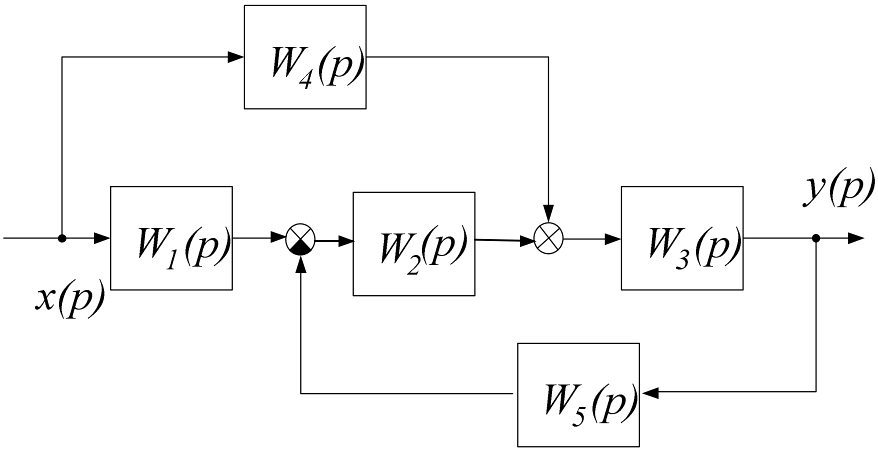


Рис. 2 – Структурна схема системи

Перетворення схеми можна виконати, переносячи суматор. Можливі два шляхи: це перенесення суматора з входу ланки $W_2(p)$ на її вихід, або перенесення суматора з виходу цієї ланки на вхід. Вибираємо перший варіант. Можна скористуватись одним з правил переносу [1]. Але достатньо таких міркувань. Зворотний сигнал проходить через ланки $W_5(p)$ та $W_2(p)$ і попадає в ланку $W_3(p)$. Після переносу він не буде проходити через ланку $W_2(p)$. Отже для того, щоб схема була еквівалентна, потрібно на шляху сигналу вставити фіктивну ланку $W_2(p)$. Еквівалентна схема після такого перетворення зображена на рис. 3.

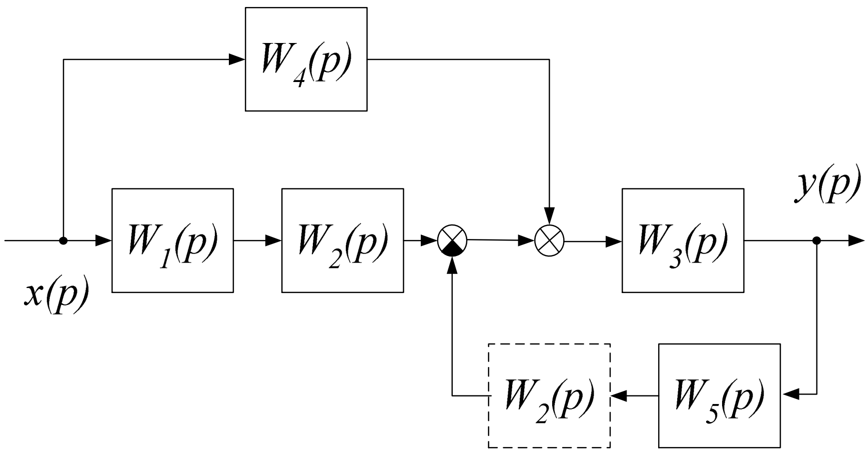


Рис. 3– Еквівалентна схема після переносу суматора з входу ланки W_2(p) на її вихід

Наступним кроком перетворення можна переставити суматори місцями.

Далі схема вже не має перехресних зв'язків. Тепер можна об'єднати ланки W_1(p) і W_2(p), які ввімкнуті послідовно, а також ланку W_5(p) і ланку W_2(p) (рис. 4).

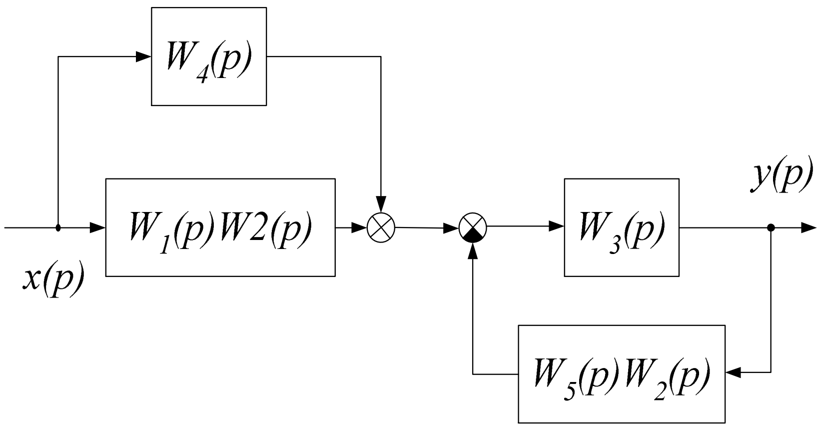


Рис. 4 – Еквівалентна схема САК після другого кроку перетворення

Ми одержали структурну схему, в якій послідовно з'єднані дві групи ланок. Перша група – це паралельно з'єднані ланки, друга група – ланки з'єднані зустрічно-паралельно. Передатна функція першої групи ланок дорівнює:

$$W_6(p) = W_1(p)W_2(p) + W_4(p),$$

другої групи:

$$W_7(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_5(p)}.$$

Структурна схема після цього кроку спрощення має вигляд, зображений на рис. 5.

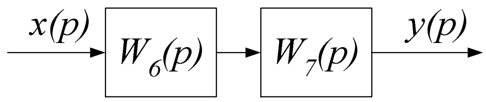


Рис. 5 – Еквівалентна схема САК після третього кроку перетворення

Замінивши дві послідовно з’єднані ланки однією, одержуємо передаточну функцію системи в цілому, яка дорівнює:

$$W(p) = \frac{(W1(p)W_2(p) + W_4(p))W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_5(p)}.$$

Підставляючи конкретні значення передатних функцій в одержану формулу, матимемо передаточну функцію системи.

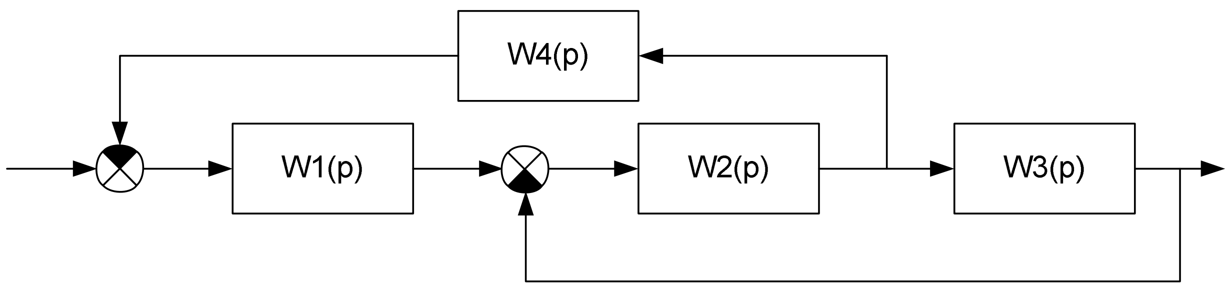
2. Обраховуємо передаточну функцію ще для одного варіанту завдання.

.

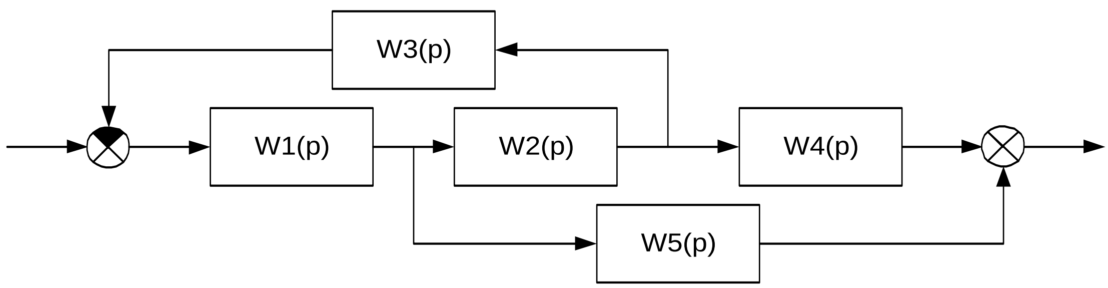
Завдання для самостійної роботи в поза аудиторний час

Варіанти завдань наведені нижче:

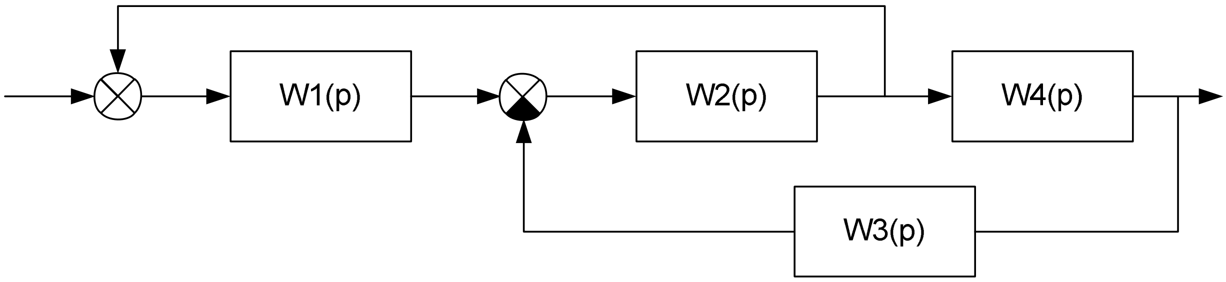
1.



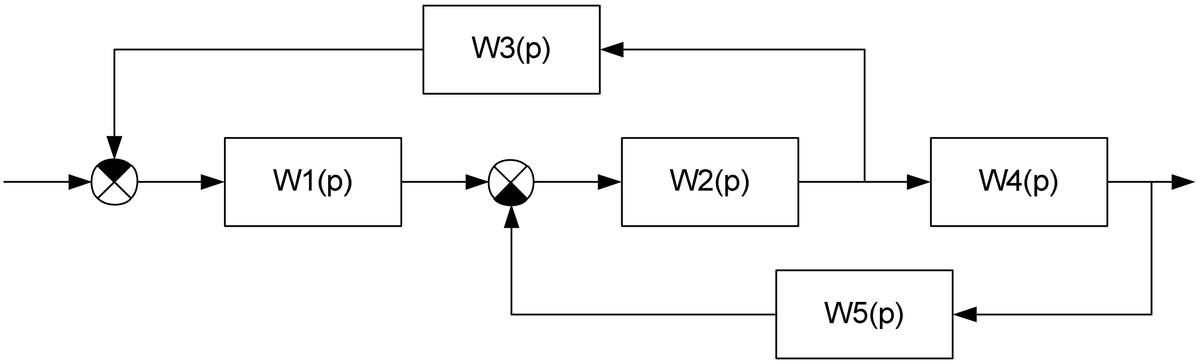
2.



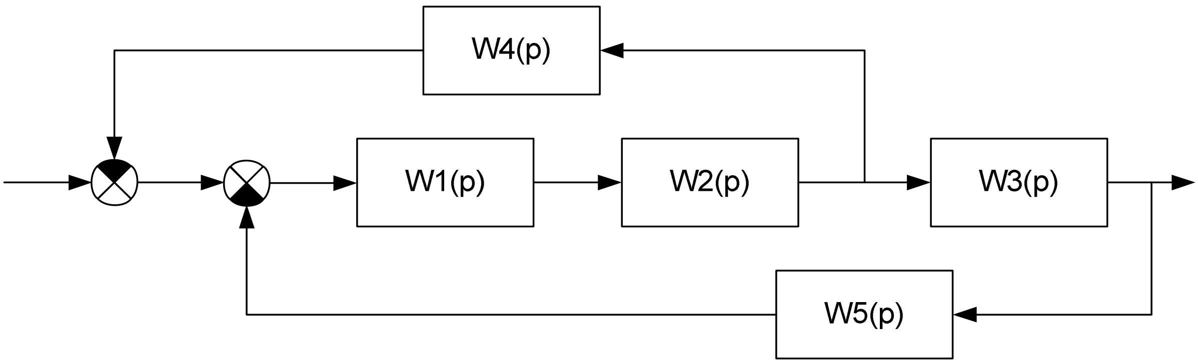
3.



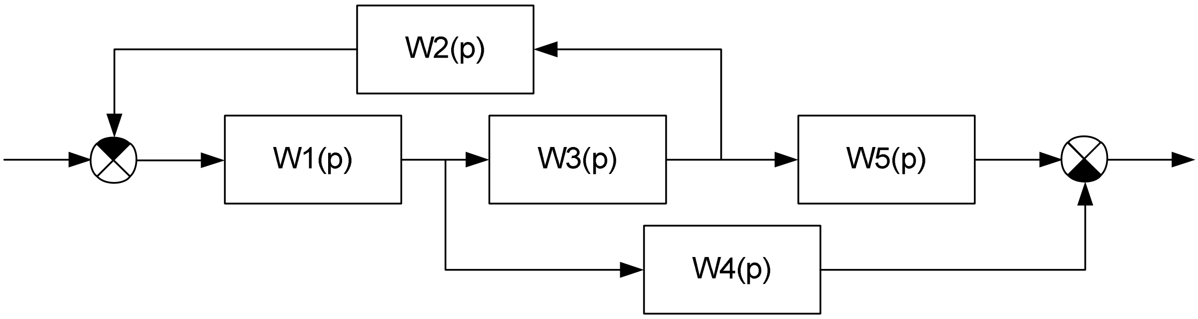
4.



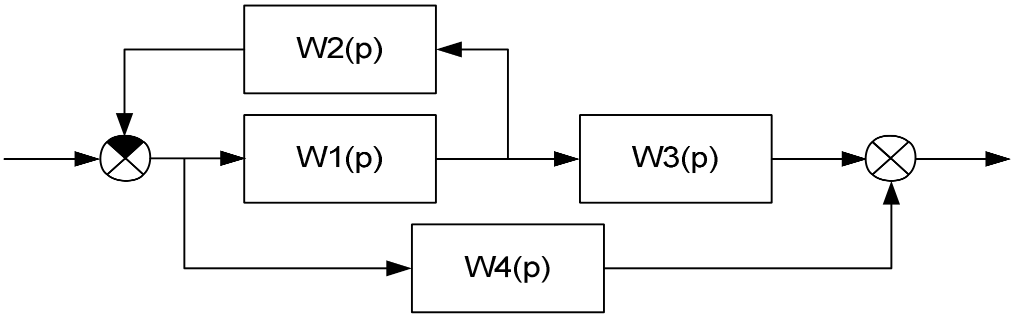
5.



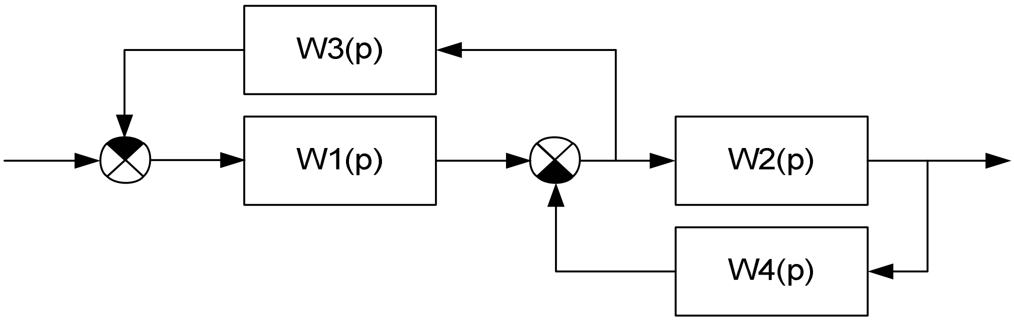
6.


W2(p)
W1(p)
W3(p)
W5(p)
W4(p)

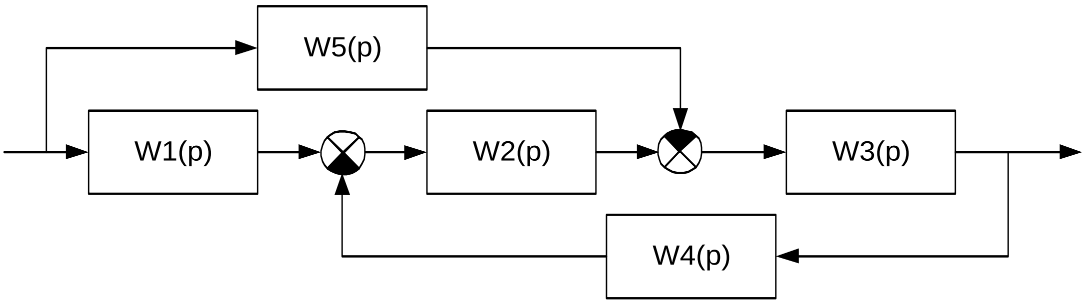
7.


W2(p)
W1(p)
W3(p)
W4(p)

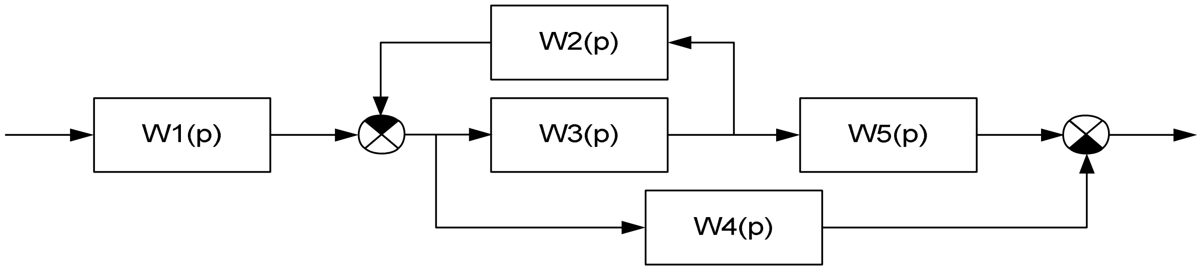
8.


W3(p)
W1(p)
W2(p)
W4(p)

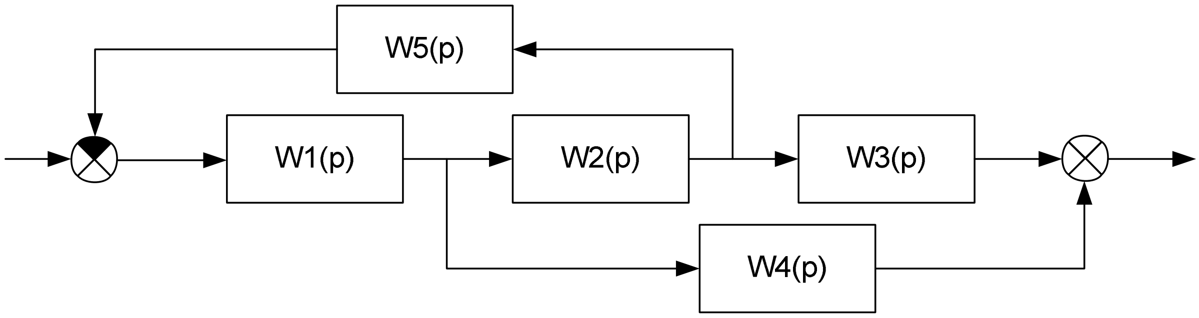
9.


W5(p)
W1(p)
W2(p)
W3(p)
W4(p)

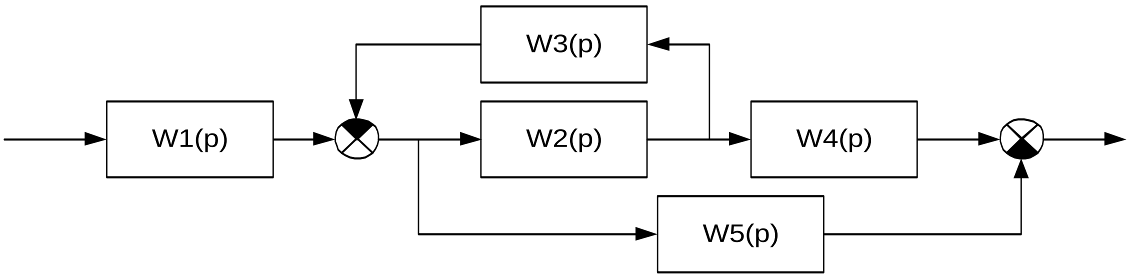
10.



11.



12.



Контрольні запитання

1. Для чого призначена структурна схема САК?
2. Чому елементарні ланки в ТАК називають динамічними?
3. Що розуміють під визначенням «динамічна ланка направленої дії»?
4. Які типи динамічних ланок ви знаєте? Запишіть їх передаточні функції.
5. Дайте визначення передаточної функції ланки.
6. Які умовні позначення використовують у структурних схемах?
7. Які типи з’єднань динамічних ланок використовують у структурних схемах САК?
8. Яке з’єднання ланок називають послідовним, паралельним?
9. Яке з’єднання ланок називають зустрічно - паралельним?

10. Чому дорівнює передаточна функція послідовно з’єднаних ланок?
11. Чому дорівнює передаточна функція паралельно з’єднаних ланок?
12. Запишіть формулу передаточної функції ланок зі зворотнім зв’язком.
13. Яку ланку називають ланкою оберненої дії?
14. Запишіть як обрахувати зображення сигналу, що пройшов через ланку з передаточною функцією W(p)?
15. Що розуміють під визначенням „розімкнута система”?
16. Які типи зворотного зв’язку ви знаєте?

Заняття 6. Побудова частотних характеристик динамічних ланок

Зміст заняття

Частотні характеристики описують вимушені усталені коливання системи.

Якщо подати гармонічний сигнал

$$x(t) = X_0(\omega)\sin(\omega t), \tag{43}$$

то після завершення перехідних процесів у системі виникнуть вимушені коливання і вихідна величина буде змінюватись за гармонічним законом:

$$y(t) = Y_0(\omega)\sin(\omega t + \varphi). \tag{44}$$

Амплітуда вихідного сигналу $Y_0(\omega)$, буде відмінною від амплітуди вхідного сигналу $X_0(\omega)$, і залежатиме як від характеристик системи так і від частоти.

Вихідний сигнал відставатиме від вихідного сигналу на певний кут $\varphi(\omega)$, який називають фазовим зсувом.

Частота коливань співпадатиме з частотою вхідного сигналу.

Змінюючи частоту вхідного сигналу та вимірюючи амплітуду та фазу вихідного сигналу, одержимо частотну характеристику системи. Графік залежності від частоти відношення амплітуд вихідного та вхідного сигналів є амплітудно-частотною характеристикою. Залежність зсуву фаз вихідного сигналу відносно вхідного − це фазово-частотна характеристика. Крім цих частотних характеристик розрізняють логарифмічні частотні характеристики. Амплітудно-фазовою частотною характеристикою є характеристика, що побудована в полярній системі координат, в якій відкладений модуль функції, що відповідає амплітуді на даній частоті, а кут повороту відповідає фазі.

Комплексною передаточною функцією називається відношення комплексного значення вихідної величини до комплексного значення вхідної величини в разі усталених гармонійних коливань. Модуль комплексної передаточної функції співпадає з амплітудно-частотною функцією, а фаза – з фазово-частотною функцією. Одержати комплексну передаточну функцію можна, якщо в передаточній функції замінити оператор p на чисто уявну величину $j\omega$.

Підготовка до занять

Під час підготовки до занять слід проробити наступний матеріал з підручника: [1] - ст. 106-129, [2] – ст. 86-117, [3] – 42-49, 52-63.

Порядок проведення заняття

На початку заняття повторити:

- визначення передаточної функції;
- визначення комплексної передаточної функції;
- типові ланки САК;
- визначення частотних характеристик;
- порядок побудови логарифмічних частотних характеристик;
- порядок побудови амплітудно-фазової частотної характеристики.

Виконання практичних завдань

1. Побудова логарифмічних частотних характеристик аперіодичної ланки.

Передаточна функція ланки:

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}.$$

Комплексна передаточна функція (КПФ):

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega+1}.$$

Чисельник та знаменник множимо на комплексно-спряжену величину знаменника:

$$W(j\omega) = \frac{K - jK\omega T}{1+T^2\omega^2} = \frac{K}{1+T^2\omega^2} - j\frac{K\omega T}{1+T^2\omega^2}.$$

Дійсна передаточна функція: $P(\omega)=\dfrac{K}{1+T^2\omega^2}$, уявна передаточна функція:

$Q(\omega)=\dfrac{-K\omega T}{1+T^2\omega^2}$.

Аргумент КПФ (амплітудно-частотна функція A(ω)):

$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}=\sqrt{\left(\frac{K}{1+T^2\omega^2}\right)^2+\left(\frac{-K\omega T}{1+T^2\omega^2}\right)^2}=\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}.$$

Фаза КПФ (фазово-частотна функція φ(ω)):

$$\varphi(\omega)=arc\ tg\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=arc\ tg\,\frac{\dfrac{-K\omega T}{1+T^2\omega^2}}{\dfrac{K}{1+T^2\omega^2}}=arc\ tg\ (-\omega T)=-arc\ tg\ (\omega T).$$

Логарифмічна амплітудно-частотна функція:

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}=20\lg K-10\lg(1+T^2\omega^2).$$

2. Побудову ЛФЧХ здійснюємо методом асимптот.

При малих значеннях частоти ω→0 $(\lg\omega\to-\infty)$ виконується умова $1>>T^2\omega^2$. Тоді можна знехтувати величиною $T^2\omega^2$ в порівнянні з 1. Для ω→0 асимптота дорівнює:

$$LA(\omega)_{\omega\to 0}=20\lg K-10\lg(1)=20\lg K.$$

Це горизонтальна асимптота, яка проходить на рівні 20lgK і йде у від’ємному напрямку.

При великих значеннях частоти $\omega\to\infty$ $(\lg\omega\to+\infty)$ виконується умова $1<<T^2\omega^2$. Можна знехтувати 1 порівняно з $T^2\omega^2$. Асимптота для $\omega\to+\infty$ дорівнює:

$$LA(\omega)_{\omega\to 0}=20\lg K-10\lg(T^2\omega^2)=20\lg K-20\lg T-20\lg\omega.$$

Величини lg ω при побудові логарифмічних частотних характеристик відкладуться по осі ординат. Якщо позначити lg ω→*x*, то

$$LA(x)_{\omega \to 0} = 20\lg K - 20\lg T - 20x = C - 20x.$$

Це похила асимптота з тангенсом кута нахилу -20 дБ/декаду.

Знаходимо точку, через яку проходить асимптота. Коли $\omega = \frac{1}{T}$ з рівняння асимптоти матимемо:

$$LA(x)_{\omega \to 0} = 20\lg K - 20\lg T\omega = 20\lg K - 20\lg 1 = 20\lg K,$$

Це точка на горизонтальній асимптоті при частоті спряження $\omega = \frac{1}{T}$. ЛАЧХ на частоті спряження $\omega = \frac{1}{T}$ має значення:

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg(1 + T^2\omega^2) = 20\lg K - 10\lg 2 = 20\lg K - 3.$$

Тобто ЛАЧХ проходить на 3 дБ нижче точки перетину асимптот.

3. Задаєм0 конкретні значення (наприклад К=20, Т=0,1) та будуємо графік.
4. Побудова логарифмічної фазово-частотної функції. Будуємо згідно з формулою $\varphi(\omega) = -arc\ tg\ (\omega T)$. Це функція арктангенса. При $\omega \to 0$ вона асимптотична осі координат, тобто наближається до нуля. При $\omega \to \infty$ значення арктангенса прагне до $\pi/2$. Для побудови графіка знайдемо значення ЛФЧХ на частоті $\omega = \frac{1}{T}$. Воно дорівнює:

$$\varphi(\omega) = -arc\ tg\ (\omega T) = -arc\ tg(1) = -\frac{\pi}{4}.$$

За обрахованими значеннями будуємо графік. Вигляд його зображений на рис. 6.

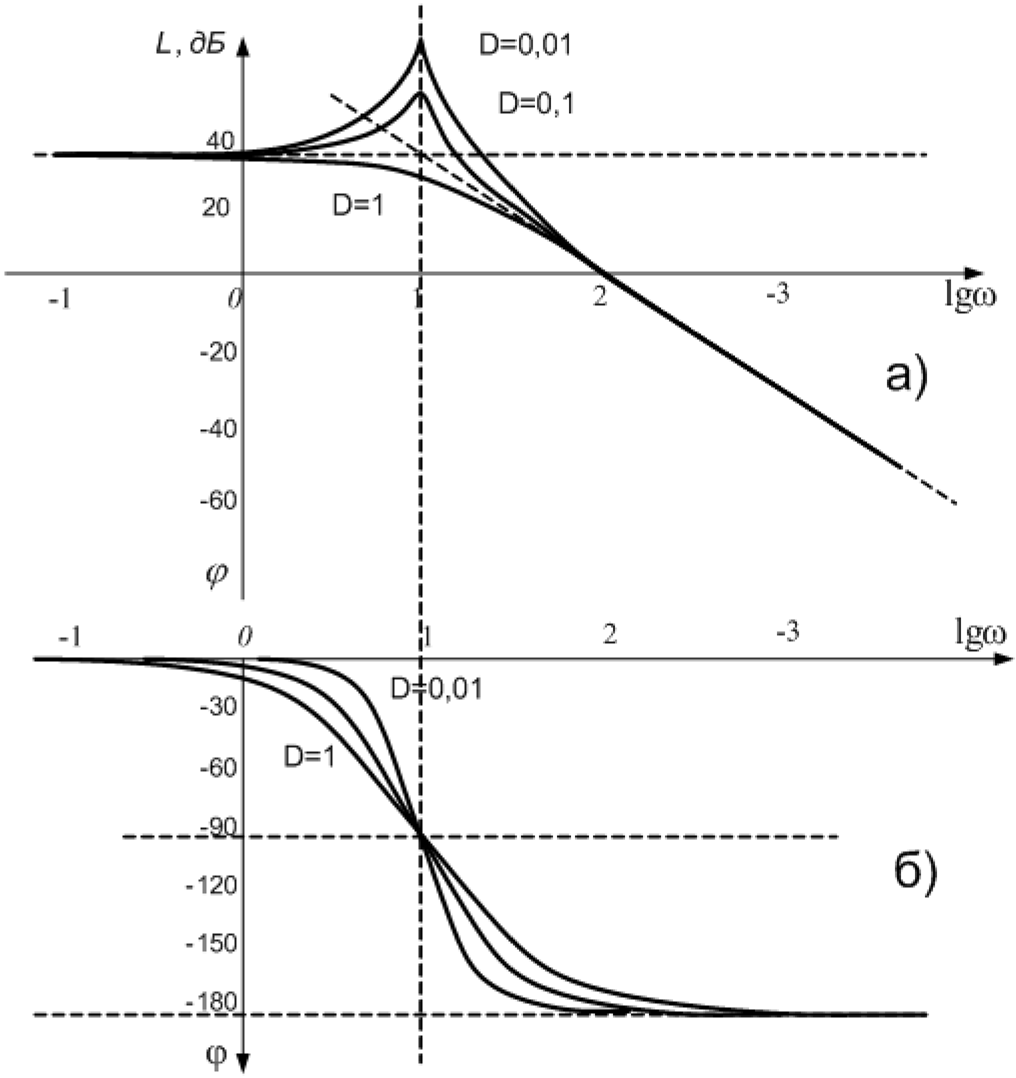


Рис. 6. − Частотні характеристики коливальної ланки

5. Побудова графіка амплітудно-фазової частотної характеристики Для побудови розраховуємо значення дійсної P(ω) та уявної Q(ω) частотних характеристик. Результати записуємо до табл. 3.

Таблиця 3

ω	P(ω)	Q(ω)
0		
0,01		
100		

Відкладаємо значення P(ω)за дійсною віссю та Q(ω) за уявною. З'єднуємо точки та одержуємо графік. У разі пропущених значень (відстань між точками велика) робимо розрахунки для проміжних значень ω.

6. Побудова логарифмічних частотних характеристик коливальної ланки.

1. Передаточна функція:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}.$$

Комплексна передаточна функція:

$$W(j\omega) = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2dTj\omega + 1} = \frac{K}{(1 - T^2\omega^2) + j2dT\omega}.$$

Множимо на комплексно спряжену величину до знаменника.

$$(1 - T^2\omega^2) - j2dT\omega.$$

Одержимо:

$$W(j\omega) = \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} - j\frac{2KdT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}.$$

Дійсна передаточна і уявна передаточна функції:

$$P(\omega) = \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2};$$

$$Q(\omega) = -\frac{2KdT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}.$$

Аргумент КПФ (амплітудно-частотна функція A(ω)):

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}}.$$

Фаза КПФ (фазово-частотна функція φ(ω)):

$$\varphi(\omega) = \frac{2KdT\omega}{(1 - T^2\omega^2)}$$

Логарифмічна амплітудно-частотна функція:

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg((1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2).$$

Побудова графіка логарифмічної амплітудно-частотної характеристики методом асимптот.

Асимптота при малих значеннях частоти ω→0 $(\lg\omega \to -\infty)$.

$$LA(\omega)_{\omega\to 0} = 20\lg K - 10\lg(1) = 20\lg K.$$

Асимптота при великих значеннях частоти $\omega \to \infty$ $(\lg\omega \to +\infty)$.

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg(T^2\omega^2) = 20\lg K - 40\lg T - 40\lg\omega.$$

Це похила асимптота з кутовим коефіцієнтом нахилу -40 дБ/дек. Вона перетинає горизонтальну асимптоту на частоті спряження $\omega_c = \frac{1}{T}$.

Значення ЛАЧХ на частоті спряження

$$L(\omega_c) = 20\lg K - 10\lg((1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2) = 20\lg K - 20\lg(2d)$$

Величина *d* для коливальної ланки має значення в межах від 0 до 1.

Якщо d=1, то $L(\omega_c) = 20\lg K - 6$. Тобто графік ЛАФЧХ проходить нижче точки перетину асимптот на 6 дБ.

Якщо d<1, то графік ЛАФЧХ піднімається вище і при d=0,5 точно співпадає з точкою співпадає перетину асимптот.

Якщо d<0,5 то ЛАЧХ на частоті спряження проходить над точкою перетину асимптот і чим менше буде значення *d*, тим вище буде знаходитись точка ЛАФЧХ.

7. Побудова графіка. Будуються асимптоти. Виставляється значення на частоті спряження та проводиться плавна лінія ЛАЧХ.

Завдання для самостійної роботи в поза аудиторний час

Побудувати логарифмічні частотні характеристики (ЛАЧХ і ЛФЧХ) підсилюючої ланки, диференційної, реальної диференційної, інтегруючої ланок.

Контрольні запитання

1. Як перетворити комплексну передаточну функцію, представлену у вигляді відношення до алгебраїчної форми?
2. Як обрахувати модуль і аргумент комплексної передаточної функції?
3. Що таке годограф комплексної передаточної функції?
4. Який зв’язок існує між комплексною передаточною функцією та частотними функціями системи?
5. Які асимптоти має частотна характеристика коливальної ланки.
6. Яка максимальна величина зсуву фаз аперіодичної ланки першого і другого порядку?
7. Який зсув фаз коливальної ланки на частоті спряження?
8. На якій відстані від перетину асимптот проходить графік ЛАЧХ аперіодичної ланки на частоті спряження?
9. Який вигляд мають АФЧХ інтегруючої і підсилюючої ланки?

Заняття 7. Побудова логарифмічних частотних характеристик складних систем

Зміст заняття

Під час аналізу складних САК часто доводиться будувати амплітудно та фазові характеристики послідовно з'єднаних ланок. Наприклад, стійкість системи за критерієм Найквіста визначають частотними характеристиками розімкнутої системи, яка являє собою ланцюжок ланок, що входять в коло зворотного зв'язку та з'єднаних послідовно. Перевагою логарифмічних частотних характеристик є те, що частотні характеристики будують простим сумуванням характеристик окремих ланок. Під час заняття виконують побудову ЛАЧХ та ЛФЧХ послідовно з'єднаних ланок розімкнутої системи та визначення її стійкості згідно з критерієм Найквіста.

Підготовка до занять

Під час підготовки до занять слід проробити наступний матеріал з підручника: [1] - ст. 130-142, [2] – ст. 95-117, 209-231, [3] – 97-117.

Порядок проведення заняття

На початку заняття необхідно повторити:

- комплексні передаточні функції динамічних ланок;
- логарифмічні частотні характеристики;
- типи з'єднань динамічних ланок;
- порядок побудови ЛАЧХ та ЛФЧХ ланок.

Виконання практичних завдань

Побудова логарифмічних частотних характеристик послідовно з'єднаних ланок (рис.7).

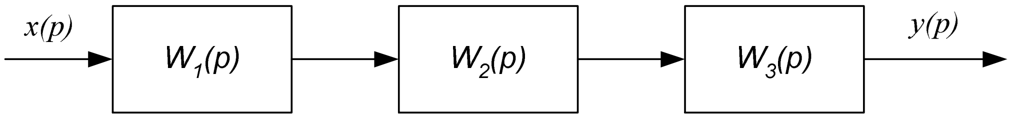


Рис. 7 – Приклад послідовно з'єднаних ланок.

Передаточні функції ланок:

$$W_1(p)=\frac{10}{0{,}9p+1};\ W_2(p)=\frac{4}{0{,}005p+1};\ W_3(p)=\frac{5}{0{,}0025p^2+0{,}1p+1}.$$

Знаходимо загальний коефіцієнт підсилення К= $К_1К_2К_3$ = 200.

Рівень горизонтальної асимптоти L = 20lgK = 46 дБ.

Визначаємо постійні часу ланок:

$$T_1= 0{,}9;\quad T_2= 0{,}005;\quad T_3= 0{,}05$$

і відповідні їм частоти спряження:

$$\omega_1=\frac{1}{T_1}=1{,}11;\ \omega_2=\frac{1}{T_2}=200;\ \omega_3=\frac{1}{T_3}=20$$

та десяткові логарифми частот спряження:

$$\lg\omega_1 = 0{,}046;\quad \lg\omega_2 = 2{,}3;\quad \lg\omega_3 = 1{,}3.$$

Визначаємо порядок ланок, нахил асимптоти та зсув фаз.

Перша ланка першого порядку – нахил асимптоти -20 дБ/дек, зсув фаз -90^0.

Друга ланка першого порядку – нахил асимптоти -20 дБ/дек, зсув фаз -90^0.

Третя ланка другого порядку – нахил асимптоти -40 дБ/дек, зсув фаз -180^0.

Візьмемо аркуш паперу і нанесемо на нього координатну сітку. Рекомендується використати весь аркуш паперу. Нанести вертикальну та дві горизонтальні осі log ω. Одну – для побудови ЛАЧХ, другу – ЛФЧХ. Відкладаємо масштаб. Рекомендується для осі для осі log ω – 3 см на декаду, осі рівня ЛАЧХ – 1 см на 20 дБ, осі фази 2 см на 90^0.

Будуємо ЛАЧХ та ЛФЧХ. Приклад побудови характеристик зображено на рис. 8.

Проводимо асимптоти. Горизонтальну асимптоту – на рівні L=46 дБ.

Відкладаємо за віссю абсцис значення десяткових логарифмів частоти всіх ланок та проводимо пунктирні вертикальні лінії.

Знаходимо точку перетину першої зліва лінії частоти спряження з горизонтальною асимптотою. Будуємо від неї похилу асимптоту ланки, яка відповідає даній частоті спряження (у нашому випадку з нахилом -20 дБ/дек).

Знаходимо точку перетину лінії наступної частоти спряження з побудованою похилою асимптотою.

Будуємо наступну похилу асимптоту, додаючи до кута нахилу попередньої асимптоти кут нахилу асимптоти ланки, якій відповідає частота спряження..

У такому ж порядку будуємо всі асимптоти.

З’єднуємо асимптоти плавною лінією, враховуючи, що для ланки першого порядку лінія проходить на 3 дБ нижче точки перетину асимптот, а для ланки другого порядку значення залежить від величини постійної затухання ланки. У нашому випадку d=0,5.

Логарифмічну фазово-частотну характеристику будуємо в такому порядку. Відкладаємо частоти спряження (рис. 8).

Відповідно до порядку ланки, відкладаємо межі зсуву фаз для кожної ланки. Залежно від типу ланки вибираємо ширину смуги. Для наступної ланки діапазон зсуву фаз будуємо після побудови такого діапазону для попередньої ланки. Якщо ланка диференційна, то смугу частот відкладаємо вверх.

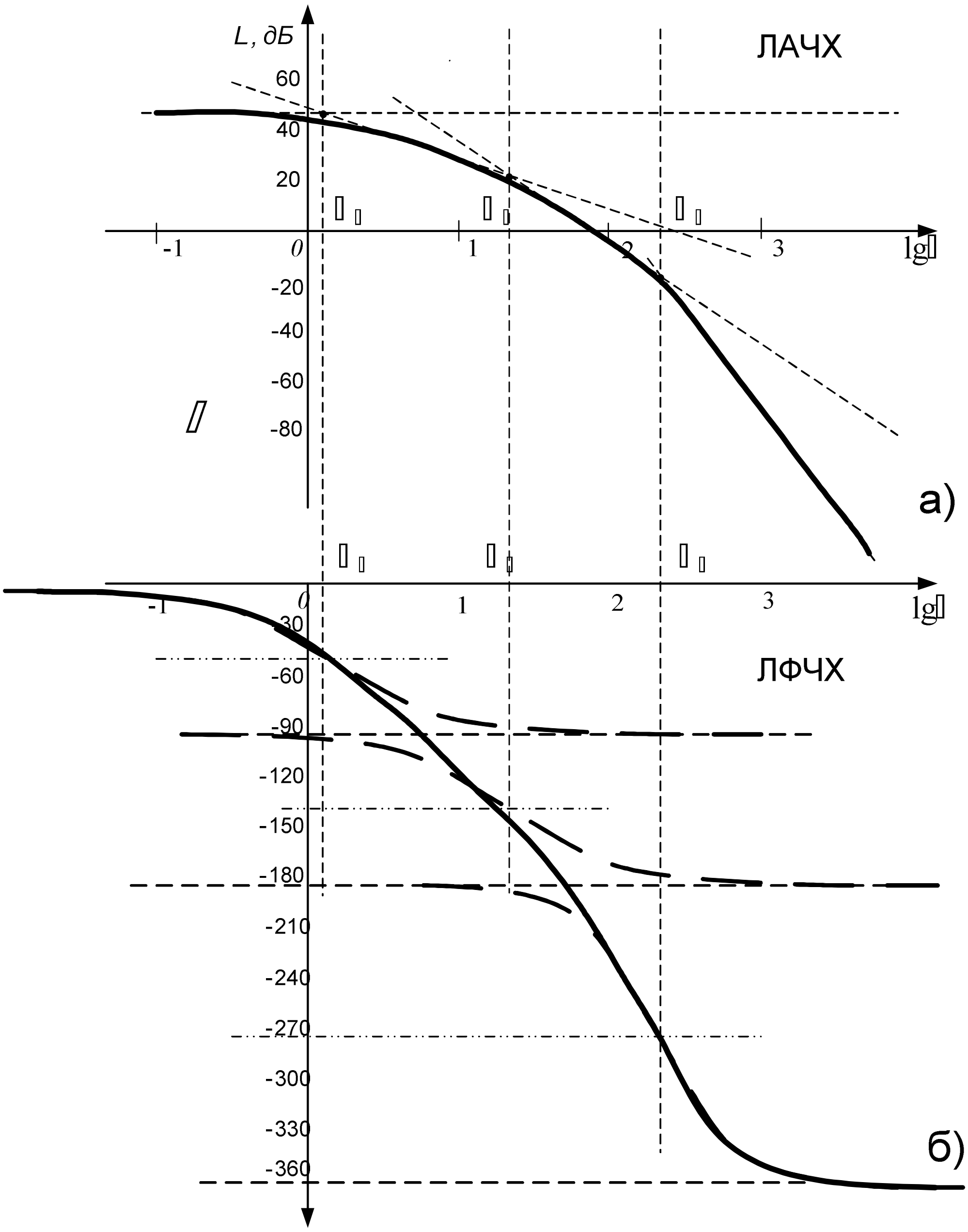


Рис. 8 – Приклад побудови логарифмічних частотних характеристик

Ділимо діапазони кожної ланки на половину і ставимо точки на частотах спряження.

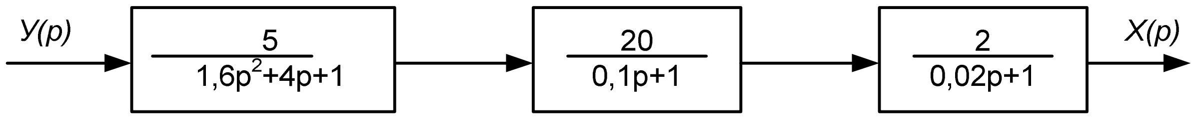
Через поставлені точки проводимо фазові характеристики кожної ланки у вигляді арктангенса.

З'єднуємо характеристики окремих ланок суцільною лінією і одержуємо ЛФЧХ нашої системи (рис. 8, б).

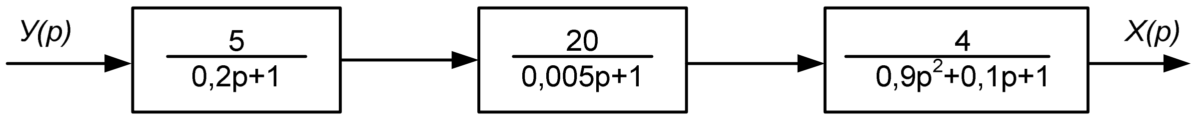
Завдання для самостійної роботи в поза аудиторний час

Побудувати логарифмічні амплітудно-частотну та фазово-частотну характеристики для розімкнутих систем, варіанти яких надані нижче. Визначити стійкість системи та записати: для стійких систем запас стійкості за фазою та коефіцієнти підсилення; для нестійких систем: значення зміни фазового зсуву та коефіцієнт підсилення в дБ, щоб система була на межі стійкості.

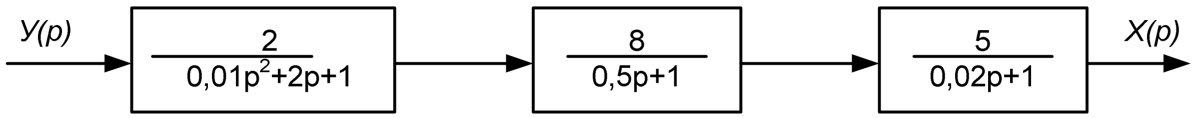
1.



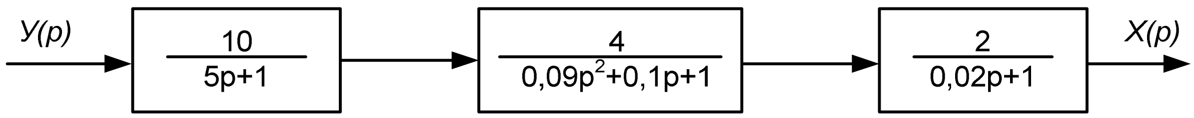
2.



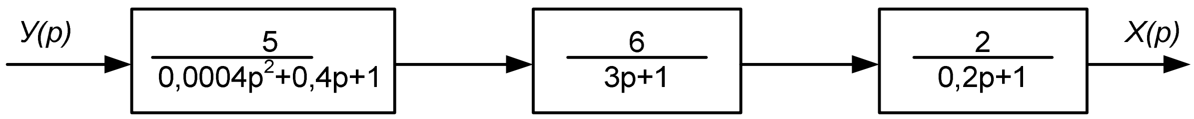
3.



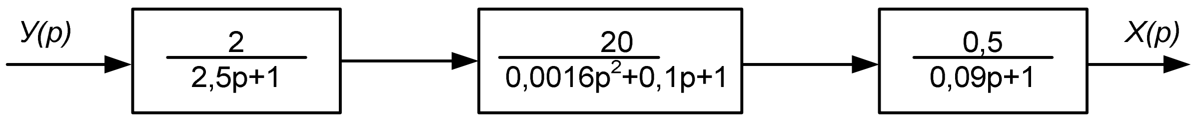
4.



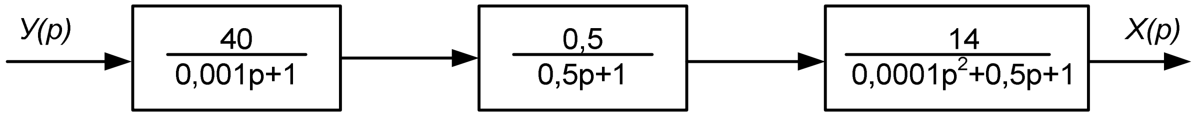
5.



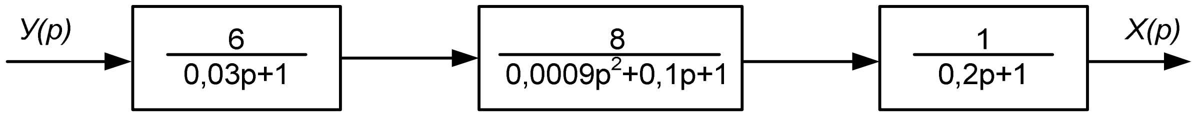
6.



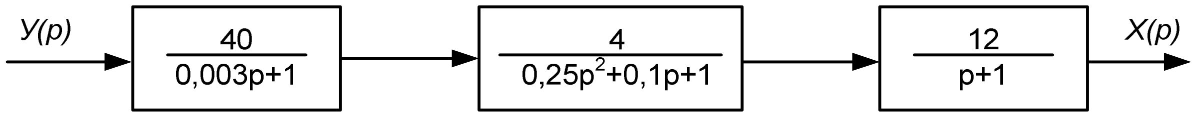
7.



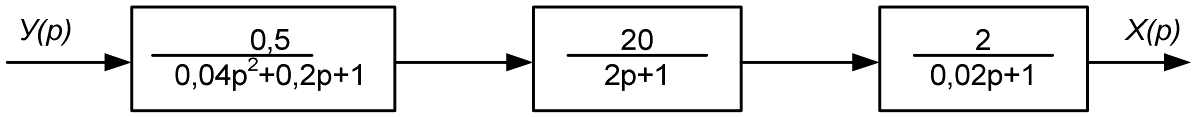
8.



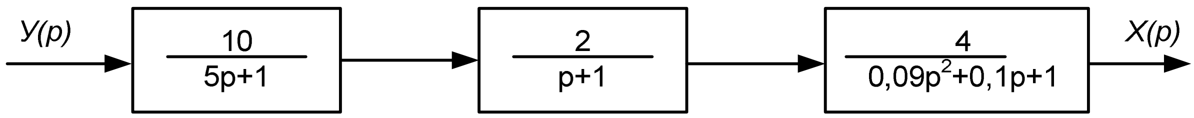
9.



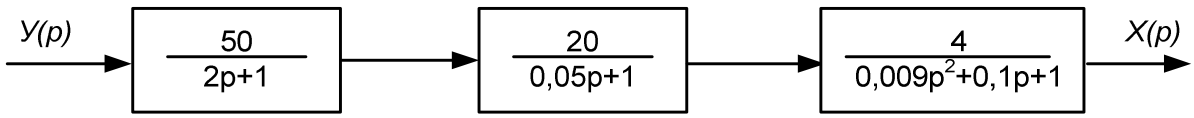
10.



11.



12.



Контрольні запитання

1. Які частотні характеристики ви знаєте?
2. Дайте визначення амплітудно-частотної характеристики.
3. Які величини відкладають по осям амплітудно-частотної характеристики?
4. Які коливання називають гармонічними?
5. Яка частота коливань напруги в промисловій електромережі?
6. Дайте визначення амплітуди, періоду, частоти й фази гармонічних коливань.
7. Чому дорівнює фаза коливань у момент, коли напруга досягнула максимальної величини, ½ максимальної величини?
8. Який проміжок часу відповідає зсуву фаз трифазної електромережі?

9. Як змінюється гармонічний сигнал, проходячи через лінійну систему?
10. Дайте визначення фазово-частотної характеристики.
11. Яку частоту називають граничною, резонансною і частотою спряження?
12. У чому полягає явище резонансу?
13. Поясніть, як і чому змінюється амплітуда вихідного сигналу системи при збільшенні частоти вхідного сигналу.
14. Як змінюється фаза вихідного сигналу при збільшенні частоти?

Заняття 8. Визначення стійкості системи за критерієм Михайлова.

Зміст заняття

Стійкість – характеристика, яка визначає можливість практичного використання САК. Умовою стійкості є знаходження коренів характеристичного рівняння в лівій частині комплексної площини. Проте знайти корені характеристичного рівняння високого порядку не просто. Тому для визначення стійкості САК використовують цілий ряд критеріїв, які дозволяють вирішити питання стійкості системи без розв'язання характеристичного рівняння. Одним з таких критеріїв є критерій Михайлова, який формулюється таким чином:

Для стійкості системи необхідно та достатньо, щоб годограф Михайлова, побудований для замкнутої системи, розпочинаючись на додатній частині дійсної осі послідовно обходив n квадрантів комплексної площини. (тут n – порядок характеристичного поліному системи. Годограф Михайлова будують для комплексу Михайлова. Комплекс Михайлова одержують заміною оператора p на $j\omega$ у поліномі Михайлова, яким є знаменником передатної функції замкнутої системи.

Порядок проведення заняття

На початку заняття повторити теоретичний матеріал, а саме:

- умова стійкості САК;
- критерії стійкості;
- критерій Гурвіца;
- критерій Найквіста;
- критерій Михайлова;
- запас стійкості.

Виконати практичні завдання, проаналізувати результати та видати завдання для самостійної роботи.

Виконання практичних завдань

Використовуючи критерій стійкості Михайлова, визначити стійкість системи, якщо передаточна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$W(p)=\frac{1}{a_1p^5+a_2p^4+a_3p^3+a_4p^2+a_5p}.$$

Коефіцієнти передаточної функції мають значення:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0,09	0,4	2,8	6	20

Визначаємо передаточну функцію замкнутої системи:

$$W(p)=\frac{\dfrac{1}{a_1p^5+a_2p^4+a_3p^3+a_4p^2+a_5p}}{1+\dfrac{1}{a_1p^5+a_2p^4+a_3p^3+a_4p^2+a_5p}}=$$

$$=\frac{1}{a_1p^5+a_2p^4+a_3p^3+a_4p^2+a_5p+1}.$$

Поліном Михайлова - це знаменник передатної функції замкнутої системи:

$$D(p)=a_1p^5+a_2p^4+a_3p^3+a_4p^2+a_5p+1.$$

Комплекс Михайлова знаходимо заміною оператора p на $j\omega$:

$$D(p)=a_1j\omega^5+a_2\omega^4-a_3j\omega^3-a_4\omega^2+a_5j\omega+1.$$

Дійсна та уявна частини:

$$A(\omega)=(a_2\omega^4-a_4\omega^2+1);$$

$$B(\omega)=a_1\omega^5-a_3\omega^3+a_5\omega.$$

Підставивши їх, одержуємо:

$$A(\omega)=0{,}4\omega^4-6\omega^2+1;$$

$$B(\omega)=0{,}09\omega^5-2{,}8\omega^3+20\omega.$$

Для побудови годографа складемо розрахункову таблицю 4, яка рекомендується в інтервалі від 0 до 5 з кроком 0,5. Приклад побудови годографа зображений на рис. 9.

Таблиця 4 – Результати розрахунку годографа Михайлова

ω	A(ω)	B(ω)
0	1,00	0,00
0,5	-0,48	9,65
1	-4,60	17,29
1,5	-10,48	21,23
2	-16,60	20,48
2,5	-20,88	15,04
3	-20,60	6,27
3,5	-12,48	-2,78
4	7,40	-7,04
4,5	43,53	0,93
5	101,00	31,25

Згідно з критерієм Михайлова система стійка, оскільки годограф проходить послідовно у напрямку проти годинної стрілки 5 квадрантів комплексної площини 1, 2, 3, 4, і 5.

Завдання для самостійної роботи в поза аудиторний час

У табл. 3 приведені значення коефіцієнтів знаменника передаточної функції розімкнутої системи. Побудуйте годограф Михайлова та визначте стійкість замкнутої системи згідно з критерієм Михайлова.

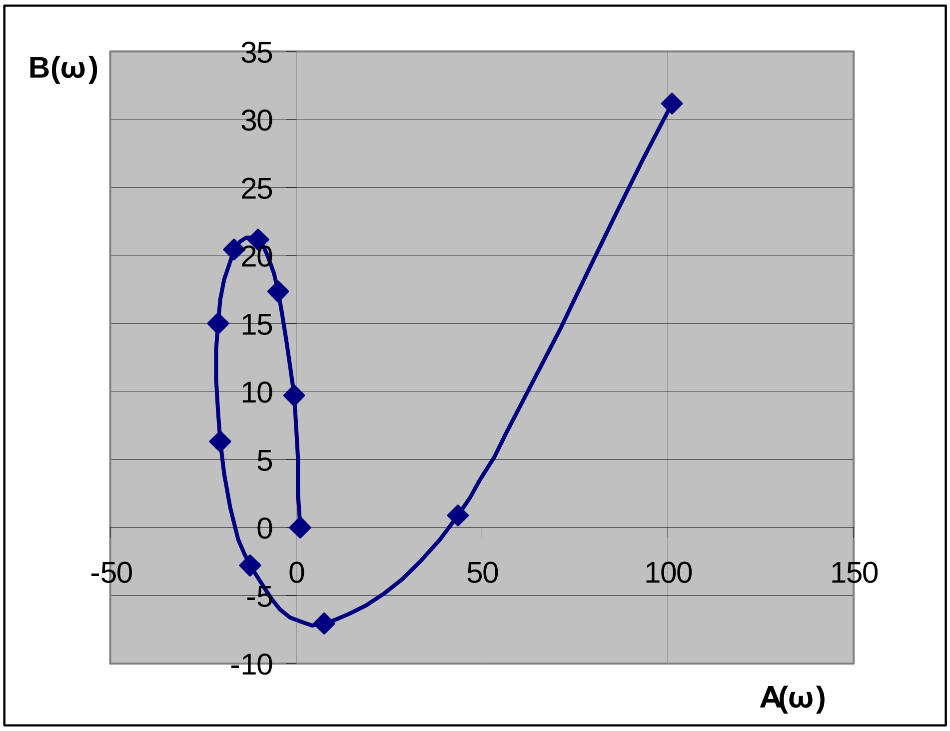


Рис. 9 – Годограф Михайлова для розгляду системи

Контрольні запитання

1. Для чого потрібні критерії стійкості, якщо є умова стійкості?
2. Які критерії стійкості Ви знаєте?
3. Сформулюйте критерій стійкості Рауса-Гурвіца.
4. Як побудувати матрицю Гурвіца?
5. Як побудувати визначники з матриці Гурвіца?
6. Як обрахувати значення визначника третього порядку?
7. Для систем якого порядку використовують критерій Гурвіца, чим це зумовлено?
8. Сформулюйте критерій Михайлова.
9. Що таке характеристичний поліном?
10. Як побудувати характеристичний комплекс?
11. Який порядок побудови годографа Михайлова?
12. Нарисуйте приклади кривої Михайлова для стійких і нестійких систем п’ятого порядку.
13. Сформулюйте критерій стійкості Найквіста.
14. Як побудувати АФЧХ розімкнутої системи зворотного зв’язку?

15. Яку частоту прийнято називати частотою зрізу?
16. Як визначити стійкість системи за критерієм Найквіста, якщо АФЧХ йде в нескінченність?
17. Поясніть взаємозв'язок між логарифмічним критерієм стійкості і критерієм Найквіста.
18. Що таке запас стійкості системи?
19. Як визначити запас стійкості за коефіцієнтом підсилення, за модулем та за фазою?

Таблиця 5 Значення коефіцієнтів знаменника

№ варіанта	***Коефіцієнти***					
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	0,03	0,2	0,9	4	5	0
2	0,035	0,2	1,2	3	9	0
3	0,3	0,2	2,5	5	2	3
4	0,07	0,3	2,1	6	22	0
5	0,08	0,5	1	4	25	0
6	0,045	0,15	1	4	4	2
7	0,045	0,2	3	0,5	8	0
8	0,09	0,2	2,8	4	15	0
9	0,05	0,2	0,8	2	2	1
10	0,6	0,2	10	3	11	0
11	0,2	0,25	6	4	40	0
12	0,07	0,2	2,5	4	20	5
13	0,09	0,2	2,8	15	20	0
14	0,07	0,3	2,1	6	12	0
15	0,035	0,2	0,8	3	6	3
16	0,09	0,2	2,8	5	20	4

Список джерел

1. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування. Навчальний посібник. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 187 с.

2. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування і комп’ютерне моделювання (неперервні лінійні системи). Навч. посіб. Частина перша. Основи теорії систем автоматичного керування. – Х.: ФОП Тимченко, 2010. – 218 с.

3. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування і комп’ютерне моделювання (неперервні лінійні системи). Навч. посіб. Частина друга. Аналіз систем автоматичного керування засобами комп’ютерного моделювання. – Х.: ФОП Тимченко, 2010. – 156 с.

4. Попович М. Г., Ковальчук. О. В. Теорія автоматичного керування. – К.: Либідь, 2007. – 656 с.

5. Власов К. П. Теория автоматического управления. Учебное пособие. – Х.: Изд-во Гуманитарный центр, 2007. – 526 с.

6. Сорока К. О., Андрійченко В. П. Методичні вказівки до самостійного вивчення дисципліни та виконання контрольних робіт з курсу «Теорія автоматичного керування». – Х.: ХНАМГ, 2004. – 40 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи студентів

з дисципліни

«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»

(для студентів 3 курсу усіх форм навчання за напрямом підготовки 6.050702 «Електромеханіка» та слухачів другої вищої освіти спеціальності «Електричний транспорт»)

Укладачі: **СОРОКА** Костянтин Олексійович,
ЛИЧОВ Дмитро Олександрович

Відповідальний за випуск *В. Х. Далека*

Редактор *Д. Ф. Курильченко*

Комп'ютерне верстання *О. А. Балашова*

План 2010, поз. 196М

Підп. до друку 17.12.2010	Формат 60х84/16
Друк на ризографі	Ум. друк. арк. 2,4
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.